Equazioni del secondo ordine riducibili al primo ordine

Caso 1: mancanti della y

$$y'' = f(t, y').$$

Si pone $y' = z$ e si ha

$$z' = f(t, z).$$

Si risolve in z e per ottenere y si integra l'equazione

$$y'(t) = z(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} z(s)\, \mathrm{d}s.$$

Esercizio 1

Risolvere

$$\begin{cases} y'' = (y')^3 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Sia I l'intervallo massimale di esistenza.

<u>Sostituzione:</u> Ponendo $z = y'$ ci riconduciamo al sistema

$$\begin{cases} z' = z^3 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione dell'equaz. in z: la soluzione stazionaria è $z(t) \equiv 0$. Essendo $0 < z(0) = 1$, per confronto ricavo che

$$z(t) > 0 \quad \forall\, t \in I.$$

Separando le variabili (posso dividere per z perché $z(t) > 0$ su I) si ha

$$\int_1^{z(t)} \frac{1}{z^3}\,\mathrm{d}z = \int_0^t 1\,\mathrm{d}s \Rightarrow \left[-\frac{1}{2z^2}\right]_1^{z(t)} = t$$

e cioè

$$-\frac{1}{2z^2(t)} + \frac{1}{2} = t \Rightarrow z^2(t) = \frac{1}{1-2t}.$$

Poiché z è sempre positiva, concludo

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \quad \forall\, t \in I = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right).$$

Risoluzione dell'equaz. in y: Da $y'(t) = z(t)$ segue

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-2s}}\,\mathrm{d}s \\ &= 5 + \int_0^t (1-2s)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s \\ &= 5 + \left[\frac{(1-2s)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\frac{1}{(-2)}\right]_0^t \\ &= 6 - \sqrt{1-2t} \end{aligned}$$

Ritroviamo che l'intervallo massimale su cui y è derivabile due volte è proprio $I = (-\infty, \frac{1}{2})$.

Esercizio 2

Risolvere

$$\begin{cases} y'' = e^{y'} \\ y(0) = 2\ln(2) \\ y'(0) = -2\ln(2) \end{cases}$$

Sia I l'intervallo massimale di esistenza.

Sostituzione: Ponendo $z = y'$ ci riconduciamo a

$$\begin{cases} z' = \exp(z) \\ z(0) = -2\ln(2) = -\ln(4) \end{cases}$$

Risoluzione dell'equaz. in z: Separando le variabili si ha

$$\int_{z(0)}^{z(t)} \frac{1}{e^z}\, \mathrm{d}z = \int_0^t 1\, \mathrm{d}s \Rightarrow \left[-e^{-z}\right]_{z(0)}^{z(t)} = t$$

e cioè

$$-e^{-z(t)} + e^{\ln(4)} = t \Rightarrow e^{-z(t)} = 4 - t.$$

Concludo

$$z(t) = -\ln(4-t) \qquad \forall\, t \in I = (-\infty, 4)\,.$$

Risoluzione dell'equaz. in y: Da $y'(t) = z(t)$ segue

$$y(t) = y(0) + \int_0^t [-\ln(4-s)] \, \mathrm{d}s$$

Integrando per parti si ha

$$-\int_0^t \ln(4-s) \, \mathrm{d}s$$

$$= \int_0^t s \left(\frac{-1}{4-s}\right) \mathrm{d}s - [s \ln(4-s)]_0^t$$

$$= \int_0^t \frac{4-s}{4-s} \mathrm{d}s - \int_0^t \frac{4}{4-s} \mathrm{d}s - t \ln(4-t)$$

$$= t + (4-t)\ln(4-t) - 4\ln(4)$$

e quindi

$$y(t) = t + (4-t)\ln(4-t) - 3\ln(4) \quad \forall\, t \in I = (-\infty, 4) \, .$$

Esercizio 3

Risolvere

$$\begin{cases} y'' + 4ty' = -4e^{-2t^2} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Sia I l'intervallo massimale di esistenza.

Sostituzione: Ponendo $z = y'$ si ha

$$\begin{cases} z' + 4tz = -4e^{-2t^2} \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Risoluzione dell'equaz. in z: ho un'equazione lineare del primo ordine in z, con

$$a(t) = 4t \quad \text{e} \quad b(t) = -4e^{-2t^2}.$$

Dunque $I = \mathbb{R}$ e per calcolare z trovo

$$A(t) = \int_0^t 4s\,ds = 2t^2.$$

Usando la formula risolutiva

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-2t^2} \int_0^t e^{2s^2}(-4e^{-2s^2})\,\mathrm{d}s \\ &= e^{-2t^2} \int_0^t (-4)\,\mathrm{d}s \\ &= -4te^{-2t^2}. \end{aligned}$$

Risoluzione dell'equaz. in y: Da $y'(t) = z(t)$ segue

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + \int_0^t z(s)\,\mathrm{d}s \\ &= 1 + \int_0^t -4se^{-2s^2}\,\mathrm{d}s \\ &= 1 + \left[e^{-2s^2}\right]_0^t = e^{-2t^2} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esercizio 4

Risolvere

$$\begin{cases} y'' = -e^t (y')^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Sia I l'intervallo massimale di esistenza.

<u>Sostituzione:</u> Ponendo $z = y'$ si ha

$$\begin{cases} z' = -e^t z^2 \\ z(0) = -1. \end{cases}$$

Si osservi che $z(t) \equiv 0$ è la soluzione stazionaria con dato $z(0) = 0$. Per confronto abbiamo

$$z(t) < 0 \quad \forall\, t \in I,$$

quindi possiamo dividere per z nella separazione delle variabili. <u>Risoluzione dell'equaz. in z:</u> Separando le variabili si ha

$$\int_{z(0)}^{z(t)} \left[-\frac{1}{z^2}\right] \mathrm{d}z = \int_0^t e^s \, \mathrm{d}s \Rightarrow \left[\frac{1}{z}\right]_{-1}^{z(t)} = e^t - 1$$

e cioè

$$\frac{1}{z(t)} = e^t - 2 \Rightarrow z(t) = \frac{1}{e^t - 2}.$$

L'intervallo massimale di esistenza per z è $(-\infty, \ln(2))$: infatti, $\frac{1}{e^t-2}$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$. Tuttavia, z, in quanto soluzione di una equazione differenziale, si considera definita su un intervallo. Tale intervallo deve contenere $t = 0$, dove è data la condizione iniziale. Quindi, essendo $\ln(2) > 0$, l'intervallo è la semiretta $(-\infty, \ln(2))$.
Si noti che su tale intervallo $e^t - 2 < 0$.

Risoluzione dell'equaz. in y: Da $y'(t) = z(t)$ segue

$$y(t) = y(0) + \int_0^t z(s)\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t \frac{1}{e^s - 2},\mathrm{d}s.$$

Tratto l'ultimo integrale con la sostituzione $\zeta = e^s \Rightarrow \mathrm{d}\zeta = e^s\,\mathrm{d}s$ e quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{e^s-2}\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{e^s}{e^{2s}-2e^s}\,\mathrm{d}s &= \int_1^{e^t} \frac{1}{\zeta^2 - 2\zeta}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_1^{e^t} \left(\frac{1}{2(\zeta-2)} - \frac{1}{2\zeta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(|\zeta - 2|) - \ln(|\zeta|)\right]_1^{e^t} \\
&= \frac{1}{2}\ln(2-e^t) - \frac{1}{2}\ln(e^t).
\end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio ho usato che $e^t - 2 < 0$).
Quindi

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2}\ln(2-e^t) - \frac{1}{2}t \quad \forall t \in I = (-\infty, \ln(2)).$$